

Sistemas de Ecuaciones. Ecuaciones de energía y continuidad

MC2314 - Mecánica de Fluidos III

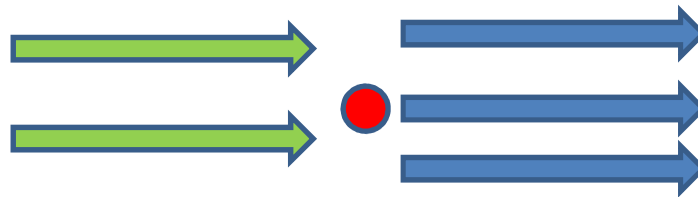
Prof. Geanette Polanco

Ene-mar 2011

Ecuación de continuidad

Dado que los sistemas de tuberías estudiados obedecen a una condición estacionaria. No existe acumulación de flujo ni vaciado de elementos.

Por lo tanto la ecuación de continuidad se escribe como:



$$\sum Q_{entrada} = \sum Q_{salida}$$

$$\sum Q_{entrada} - \sum Q_{salida} = 0$$

Ecuación de energía

Hasta el momento se ha aplicado la ecuación de Bernoulli para sistemas en serie, paralelo y ramificados. Siempre bajo las premisas de:

- Flujo incompresible
- Flujo estacionario
- La existencia de una línea de corriente entre dos puntos "1" y "2" genéricos.

$$H_1 = H_2 + \sum \text{pérdidas} + \sum \text{turbinas} - \sum \text{bombas}$$

$$H_1 = \frac{p_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{V_1^2}{2g}$$

Ecuación de energía

Tanto para las mallas como las pseudomallas la ecuación de balance de energía representa el planteamiento de la ecuación de Bernoulli sobre una línea de corriente que recorre el borde de las mallas o pseudomallas establecidas para un problema siguiendo las mismas premisas

$$H_1 = H_2 + \sum \text{pérdidas} + \sum \text{turbinas} - \sum \text{bombas}$$

$$H_1 = \frac{p_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{V_1^2}{2g}$$

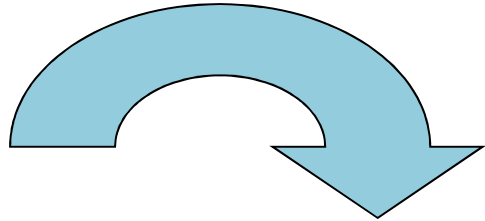
Ecuación de energía

Convención de sentido de flujos 

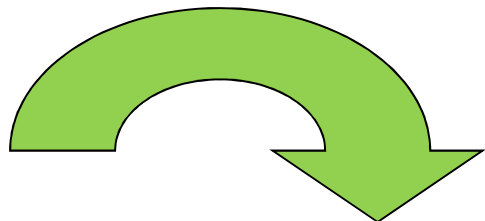
$$(H_1 - H_2) - \sum \text{pérdidas} - \sum \text{turbinas} + \sum \text{bombas} = 0$$

$$\sum Q_{\text{entrada}} - \sum Q_{\text{salida}} = 0$$

Para una malla  $(H_1 - H_2) = 0$



Para una Pseudomalla  $(H_1 - H_2) \neq 0$



Ecuación de energía

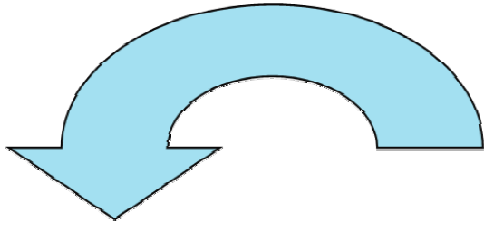
Convención de sentido de flujos 

$$0 = (H_2 - H_1) + \sum \text{pérdidas} + \sum \text{turbinas} - \sum \text{bombas}$$

Para una malla



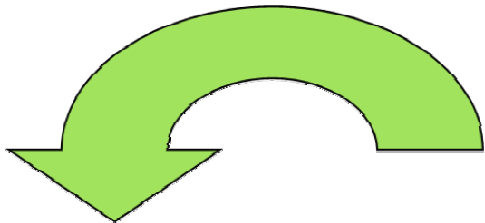
$$(H_2 - H_1) = 0$$



Para una Pseudomalla




$$(H_2 - H_1) \neq 0$$




Ecuación de energía

¿Cómo se deben expresar las pérdidas?

Ecuación de Darcy-Weisbach




$$\sum \text{pérdidas} = \sum R_i Q^2$$

$$R_i = \left(f \frac{L}{D} + \sum K \right) \frac{1}{2gA^2}$$

Ecuación de Hazen-Williams


$$\sum \text{pérdidas} = \sum R_i Q^{1.851}$$
$$R_i = \frac{6.824 L A^2}{C^{1.851} D^{1.167}}$$

C Coeficiente de Hazen Williams

Sistema de tuberías / Definiciones

- **NODO:** Unión de dos o más elementos 
(Los nodos color rojo representan una ecuación relevante para el sistema de ecuaciones a resolver, los nodos amarillos no)
- **MALLA o RED:** circuito o lazo cerrado de flujo definido por elementos físicos 
- **PSEUDO-MALLA:** circuito o lazo de flujo no cerrado definido por elementos físicos y un elemento imaginario (unión imaginaria entre tanques) 

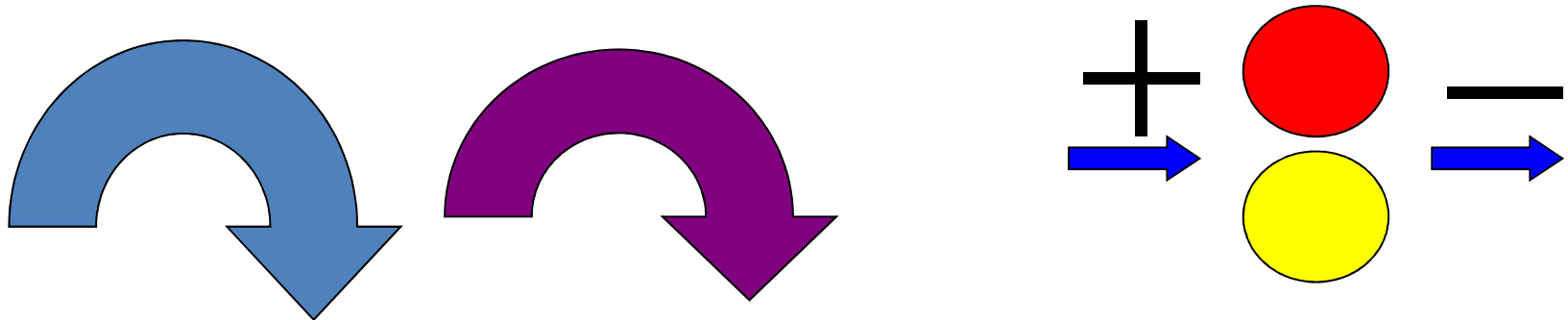
Sistema de tuberías / Definiciones

- RED ABIERTA: “Red de tubos o líneas expuestas en sistemas de acueductos” (1)
- RED CERRADA: “Conocida también como sistemas con circuitos cerrados o ciclos” (1)
- RED-MIXTA: Combinación de las anteriores

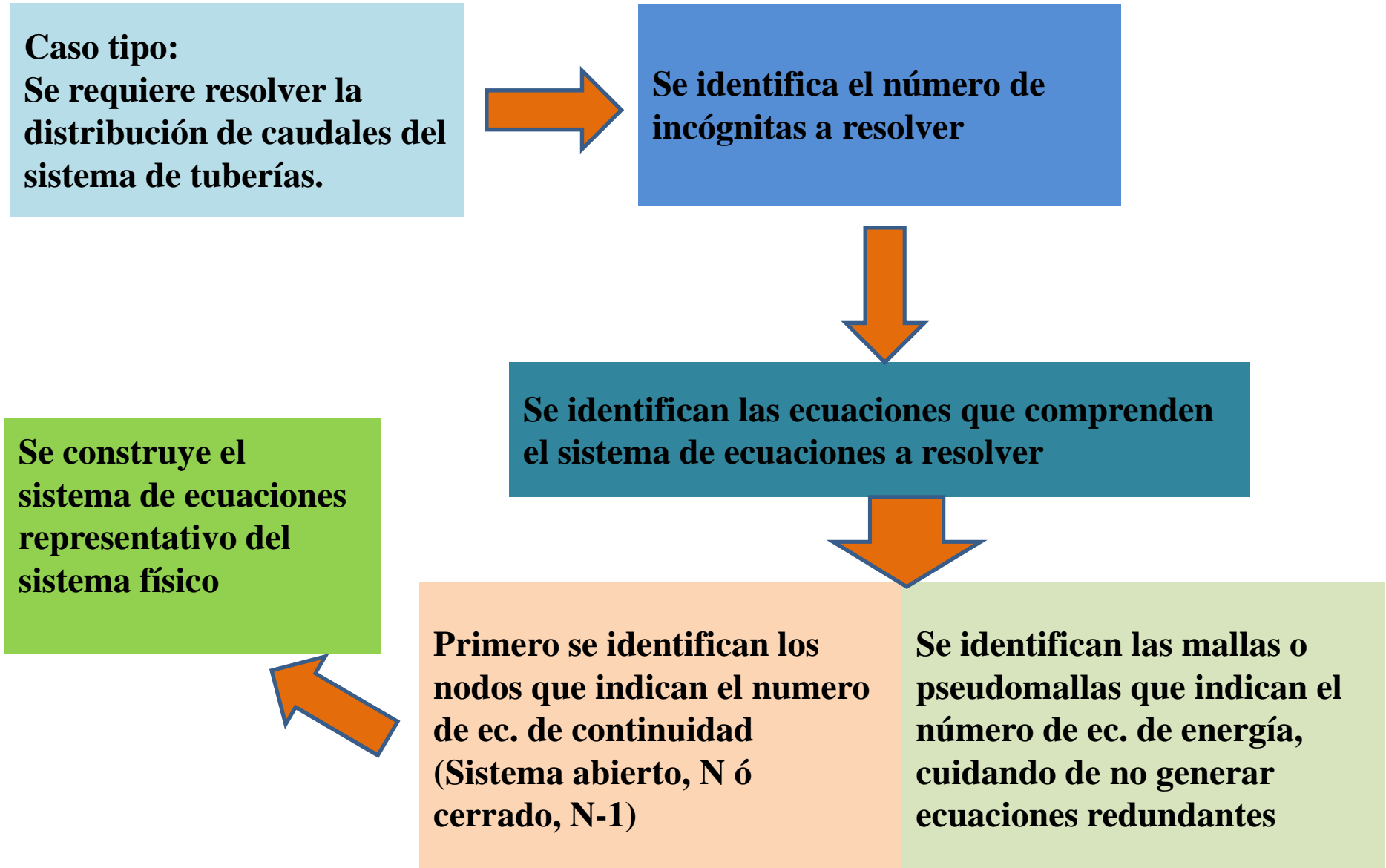
Sistema de tuberías / Definiciones

- CONVENCION DE SIGNOS Y SENTIDOS

Se establece como sentido positivo para cada malla y pseudo-malla el sentido horario, así como los caudales de entrada a un nodo y negativos los caudales que salen



Sistemas de tuberías

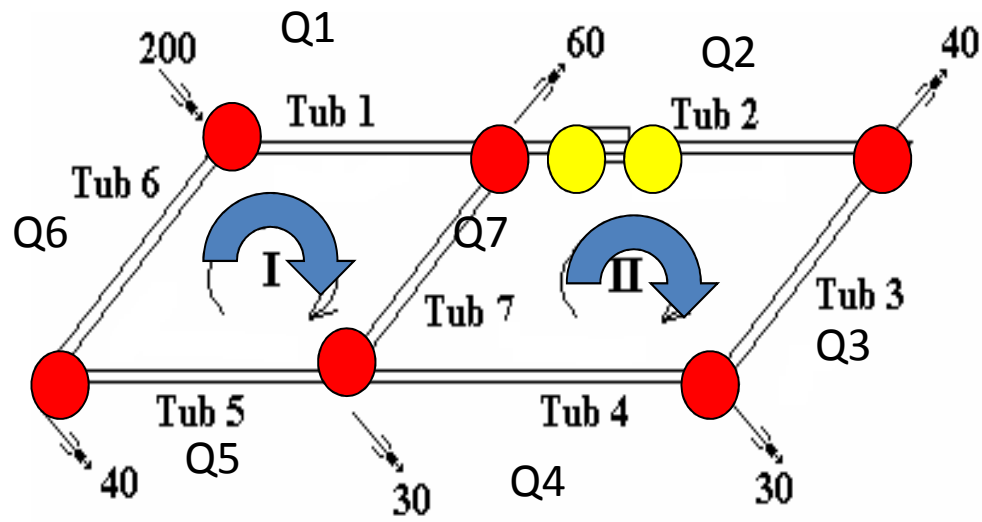


Ecuación de energía

Ejemplo caso tipo: Planteamiento del sistema de ecuaciones

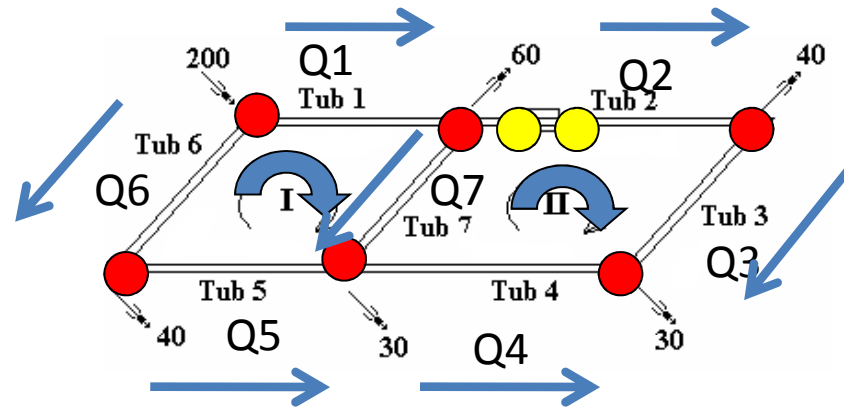
$$(H_1 - H_2) - \sum \text{pérdidas} - \sum \text{turbinas} + \sum \text{bombas} = 0$$

$$\sum Q_{\text{entrada}} - \sum Q_{\text{salida}} = 0$$



Ecuación de energía

Ejemplo caso tipo: Planteamiento del sistema de ecuaciones



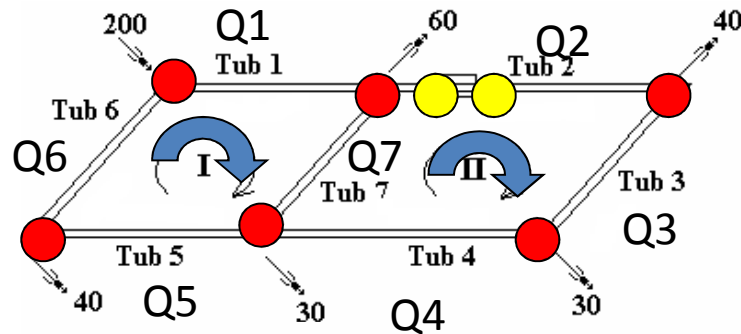
Tomando una distribución inicial de flujos las ecuaciones de energía para las mallas del sistema quedan:

$$R1 * Q1^2 + R7 * Q7^2 - R5 * Q5^2 - R6 * Q6^2 = 0$$

$$R2 * Q2^2 + R3 * Q3^2 - R4 * Q4^2 - R7 * Q7^2 = 0$$

Ecuación de energía

Ejemplo caso tipo: Planteamiento del sistema de ecuaciones



Sistema de ecuaciones (5 Continuidad +
de **7 x 7** 2 Balance de energía)

¿Cómo queda el sistema de ecuaciones del sistema?

$$\begin{aligned} 0,2 - Q1 - Q6 &= 0 \\ Q1 - Q2 - Q7 - 0,06 &= 0 \\ Q2 - Q3 - 0,04 &= 0 \\ Q3 + Q4 - 0,03 &= 0 \\ Q7 + Q5 - Q4 - 0,03 &= 0 \end{aligned}$$

Ecuaciones de Continuidad.
Según sentidos de flujo supuestos

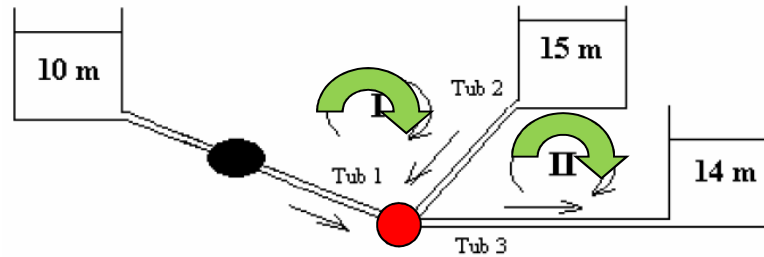
$$\begin{aligned} R1 * Q1^2 + R7 * Q7^2 - R5 * Q5^2 - R6 * Q6^2 &= 0 \\ R2 * Q2^2 + R3 * Q3^2 - R4 * Q4^2 - R7 * Q7^2 &= 0 \end{aligned}$$

Los coeficientes R son variables
y función del caudal

Ecuación de energía

Ejemplo caso tipo: Planteamiento del sistema de ecuaciones

$$(H_1 - H_2) - \sum \text{pérdidas} - \sum \text{turbinas} + \sum \text{bombas} = 0$$

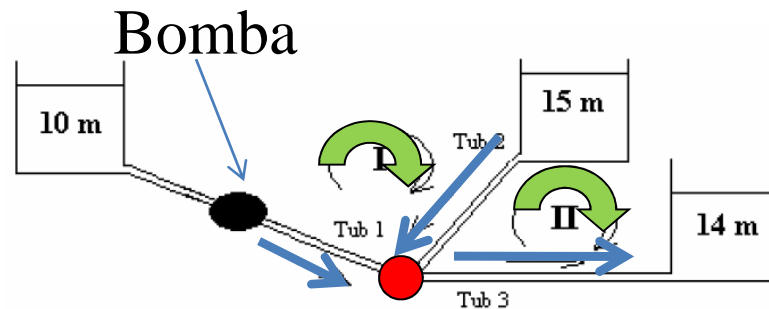


Lazo I: Pseudomalla $(H_1 - H_2) - \sum \text{pérdidas} + \sum \text{Bombas} = 0$

Lazo II: Pseudomalla $(H_1 - H_2) - \sum \text{pérdidas} = 0$

Ecuación de energía

Ejemplo caso tipo: Planteamiento del sistema de ecuaciones



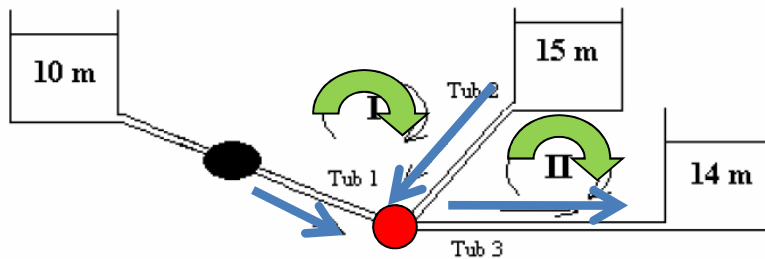
Tomando una distribución inicial de flujos las ecuaciones de energía para las mallas del sistema quedan:

$$\begin{aligned} (10 - 15) + R2 * Q2^2 - R1 * Q1^2 + H_{\text{bomba}} &= 0 \\ (15 - 14) - R3 * Q3^2 - R2 * Q2^2 &= 0 \end{aligned}$$

El elemento en común a dos mallas debe aparecer en las ecuaciones de cada malla con signo contrario

Ecuación de energía

Ejemplo caso tipo: Planteamiento del sistema de ecuaciones



Sistema de ecuaciones (1 Continuidad +
de **3 x 3** 2 Balance de energía)

¿Cómo queda el sistema de ecuaciones del sistema?

$$Q_1 + Q_2 - Q_3 = 0$$

$$(10 - 15) + R_2 * Q_2^2 - R_1 * Q_1^2 + H_{bomba} = 0$$

$$(15 - 14) - R_3 * Q_3^2 - R_2 * Q_2^2 = 0$$

Ecuaciones de Continuidad.
Según sentidos de flujo supuestos

Los coeficientes R son variables
y función del caudal